Etude d'une fonction polynôme

1) Etude du signe / Equation / Inéquation :

Etudier un signe c'est résoudre $f(x) > 0$ (ou $f(x) < 0$, ou …)
Pour résoudre $f(x) \leq 2$ on étudie le signe de $f(x) – 2$
L'idée est d'utiliser un tableau de signe, avec dans chaque ligne des expressions de degré 1 ou 2. Mais il faut donc une forme factorisée !

a) Factoriser une expression :

- Il y a une question avant du style « montrer que $f(x) = (2x + 1)(x-3)$ » ; dans ce cas il suffit de développer .
- On connaît une racine ou elle est évidente : par exemple on sait que $P(a)=0$ (donc a est une racine) alors $P(x) = (x-a) Q(x)$ ou Q est un polynôme que l'on détermine en développant et identifiant les coefficients.

Cas particulier : Si $P(x)=ax^2+bx+c$ et x1 et x2 sont des racines alors $P(x)=a(x-x1)(x-x2)$

b) Utiliser un tableau de signe :

c) Répondre a la question :

2) Calcul de la dérivée étude du signe de la dérivée:

On utilise la forme développée du polynôme, la dérivée est un autre polynôme.
Pour étudier le signe de la dérivée, on va donc utiliser les techniques vu au 1 .

3) Déterminer la limite en $+\infty$ (ou $-\infty$):

La limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré. Les autres termes deviennent négligeables lorsque x devient grand. La limite sera toujours $+\infty$ en $+\infty$.
Il faut prendre garde à la parité du degré le plus haut pour les limites en $-\infty$.
Remarque : une méthode plus élégante pour démontrer est de factoriser par le terme de plus haut degré, puis d'utiliser les opérations avec des limites.

4) Construire le tableau de variation :

A part pour un polynôme de degré 1 (= une droite) il n'y a pas d'asymptote.

Exercice : Construire le tableau de variation de chacun des polynômes suivants :

A) $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 4$
B) $g(x) = 3x^3 -4x^2 + 3x + 1$
C) $h(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$
D) $i(t) = t^2 - t + 2$
E) $j(x) = x^4 – x$
F) $k(x) = x^4 – 8x$
G) $l(x) = 2(x – 2)^3$